

ÍNDICE SISTEMÁTICO

	PÁGINA
Sumario	5
Prólogo	7
Unidad didáctica 1. Funciones reales de una variable real. Límites y continuidad	9
Objetivos de la Unidad	11
1. Topología de la recta real	12
1.1. Intervalos	12
1.2. Entornos	13
1.3. Conjuntos acotados	14
2. Funciones reales de una variable real	15
2.1. Definiciones	15
2.1.1. Crecimiento y decrecimiento	15
2.1.2. Acotación y extremos	16
2.2. Operaciones con funciones	16
2.2.1. Operaciones algebraicas	16

2.2.2. Composición de funciones	17
2.2.3. Función inversa	17
2.3. Funciones elementales	18
3. Límites de funciones	20
3.1. Definiciones	20
3.1.1. Límite de una función en un punto	20
3.1.2. Límites laterales	21
3.1.3. Límites infinitos	22
3.1.4. Límites en el infinito	23
3.1.5. Propiedades algebraicas de los límites	25
3.2. Cálculo de límites	25
3.2.1. Cálculo elemental de límites	25
3.2.2. Dos reglas para el cálculo de límites	29
3.2.3. Un límite muy importante	29
3.3. Infinitésimos e infinitos	30
3.3.1. Infinitésimos	30
3.3.2. Infinitésimos equivalentes	30
3.3.3. Infinitos	31
3.4. Asíntotas	32
4. Continuidad	35
4.1. Definiciones	35
4.1.1. Continuidad de una función en un punto	35
4.1.2. Tipos de discontinuidad	35
4.1.3. Continuidad lateral	37
4.1.4. Propiedades de la continuidad	37
4.2. Propiedades	39
4.2.1. Teorema del signo de una función continua	39
4.2.2. Teorema de Bolzano	39
4.2.3. Aplicación del teorema de Bolzano al cálculo aproximado de raíces de una ecuación	40
4.2.4. Teorema de los valores intermedios de Darboux	41
4.2.5. Teorema del máximo-mínimo de Weierstrass	42
Anexo. Anotaciones elementales sobre complejos	43

Conceptos básicos a retener	51
Actividades de autocomprobación	51
Referencias bibliográficas	55
Unidad didáctica 2. Derivación de funciones de una variable real	57
Objetivos de la Unidad	59
1. La derivada	60
1.1. Derivada de una función en un punto	60
1.1.1. Definición	60
1.1.2. Interpretación geométrica de la derivada	60
1.1.3. Derivada y continuidad	61
1.1.4. Derivadas laterales	61
1.1.5. Derivada de funciones definidas a trozos	62
1.2. Función derivada	62
1.2.1. Definición	62
1.2.2. Derivadas sucesivas	62
1.2.3. Derivadas de operaciones con funciones	63
1.3. Cálculo de derivadas	63
1.3.1. Cálculo elemental de derivadas	63
1.3.2. Derivación implícita	65
1.3.3. Derivación logarítmica	65
1.3.4. Fórmula de Leibniz	66
2. Aplicaciones de la derivada. La diferencial	67
2.1. Aplicación geométrica de la derivada	67
2.2. Aplicación física de la derivada	69
2.3. Aproximación de una función. La diferencial	70
2.3.1. Aproximación de una función	70
2.3.2. La diferencial	70
2.3.3. El método de Newton-Raphson para el cálculo de raíces	71
3. Propiedades locales. Representación gráfica de funciones	73
3.1. Crecimiento y extremos	73
3.1.1. Criterio de la derivada primera para crecimiento y extremos relativos	73

3.1.2. Criterio de la derivada segunda para extremos relativos	74
3.1.3. Intervalos de crecimiento	74
3.1.4. Extremos absolutos	74
3.2. Concavidad	76
3.2.1. Concavidad y puntos de inflexión	76
3.2.2. Criterio de la derivada segunda para concavidad y puntos de inflexión	77
3.2.3. Criterio de la derivada tercera para puntos de inflexión	77
3.2.4. Intervalos de concavidad	77
3.3. Representación gráfica de funciones	78
4. Problemas de optimización	79
5. Teoremas de valor medio. Regla de L'Hôpital. Polinomios de Taylor	81
5.1. Teoremas de valor medio	81
5.1.1. Teorema de Rolle	81
5.1.2. Teorema de Cauchy	82
5.1.3. Teorema de valor medio	83
5.1.4. Propiedades	83
5.2. Regla de L'Hôpital	84
5.2.1. Teorema	84
5.2.2. Cálculo de límites	84
5.3. Polinomios de Taylor	86
5.3.1. Aproximación de funciones por polinomios	86
5.3.2. Polinomio de Taylor	86
5.3.3. Fórmula de Taylor	87
5.3.4. Polinomio de McLaurin	89
5.3.5. Fórmula de McLaurin	89
Conceptos básicos a retener	91
Actividades de autocomprobación	91
Referencias bibliográficas	98
 Unidad didáctica 3. Integración de funciones de una variable real	 99
Objetivos de la Unidad	101

1. La integral de Riemann	102
1.1. Definición de la integral de Riemann	102
1.1.1. Particiones de un intervalo	102
1.1.2. Sumas de Riemann	103
1.1.3. Integrabilidad de Riemann	104
1.1.4. Criterio de integrabilidad Riemann. Funciones integrables ..	104
1.1.5. Propiedades de la integral	105
1.1.6. Interpretación geométrica de la integral	105
1.2. Teorema fundamental del cálculo	106
1.2.1. Teorema	106
1.2.2. Corolario	107
1.2.3. Primitiva o antiderivada	107
1.2.4. Regla de Barrow	107
1.3. Teorema de valor medio	108
1.3.1. Teorema de valor medio integral	109
1.3.2. Valor medio de una función	109
2. Cálculo de primitivas	109
2.1. Primitivas inmediatas	110
2.2. Métodos elementales de integración	111
2.2.1. Integración por cambio de variable	112
2.2.2. Integración por partes	112
2.2.3. Integrales de funciones racionales	113
2.2.4. Integrales de algunas funciones trigonométricas	116
2.2.5. Integrales de algunas funciones irracionales	118
3. Integrales impropias	118
3.1. Definiciones	118
3.1.1. Integral impropia de primera especie	119
3.1.2. Integral impropia de segunda especie	119
3.1.3. Integral impropia general	120
3.2. Comparación de integrales	121
3.2.1. Criterio de comparación	122
4. Aplicaciones de la integral	122
4.1. Áreas planas	122

4.2. Volúmenes y áreas de revolución	124
4.3. Longitudes de curvas	125
Conceptos básicos a retener	127
Actividades de autocomprobación	127
Referencias bibliográficas	132
Unidad didáctica 4. Curvas y superficies	133
Objetivos de la Unidad	135
1. Cónicas	136
1.1. La circunferencia	136
1.2. La elipse	138
1.2.1. Ecuaciones de la elipse	138
1.2.2. Las leyes de Kepler	140
1.2.3. Tangente a la elipse	141
1.2.4. Propiedad de reflexión	141
1.3. La hipérbola	142
1.4. La parábola	144
1.4.1. Ecuación reducida de la parábola	144
1.4.2. Ecuaciones de otras parábolas con directrices paralelas a los ejes coordenados	145
1.4.3. Ecuación general de la parábola a partir del vértice y un punto	146
1.4.4. Propiedades de la parábola	146
2. Curvas paramétricas	148
2.1. Curvas en forma paramétrica	148
2.1.1. Definiciones	148
2.1.2. Observación	149
2.1.3. Algunas parametrizaciones de curvas	149
2.1.4. Curva contraria	153
2.2. Curvas suaves	153
2.2.1. Definiciones	153
2.2.2. Curvas suaves planas	153

3. Curvas en coordenadas polares	155
3.1. Coordenadas polares	155
3.2. Definición y propiedades	155
3.2.1. Ecuación polar de una curva	155
3.2.2. Propiedades de tangencia	157
4. Superficies	159
4.1. El espacio $\mathbb{R}^3$	160
4.1.1. Sistema de referencia cartesiano	160
4.1.2. Superficies	160
4.1.3. Representación gráfica de superficies	160
4.2. Planos, esferas y cilindros	161
4.2.1. Planos	161
4.2.2. Esferas	162
4.2.3. Cilindros	163
4.3. Superficies cuádricas	165
4.3.1. Elipsoide	165
4.3.2. Hiperboloide de una hoja	166
4.3.3. Hiperboloide de dos hojas	166
4.3.4. Cono elíptico	167
4.3.5. Paraboloide elíptico	167
4.3.6. Paraboloide hiperbólico	168
Conceptos básicos a retener	169
Actividades de autocomprobación	169
Referencias bibliográficas	174
Unidad didáctica 5. Sucesiones y series	175
Objetivos de la Unidad	178
1. Sucesiones numéricas	179
1.1. Definiciones y propiedades	179
1.1.1. Sucesión de números reales	179
1.1.2. Límite de una sucesión	180
1.1.3. Carácter de una sucesión	180
1.1.4. Tipos de sucesiones	181

1.1.5. Propiedades	181
1.1.6. Subsucesiones y propiedades	181
1.2. Cálculo de límites de sucesiones	182
1.2.1. Límites de operaciones con sucesiones	182
1.2.2. Límites de sucesiones como límites de funciones	182
1.2.3. Sucesiones equivalentes	183
1.2.4. Infinitos. Jerarquía de infinitos	184
1.2.5. Dos reglas para el cálculo de límites	185
1.2.6. Criterio de Stolz	187
1.3. Sucesiones recurrentes	189
2. Series numéricas	191
2.1. Definiciones y propiedades	191
2.1.1. Serie de números reales	191
2.1.2. Carácter de una serie	191
2.1.3. Propiedades	191
2.1.4. Condición necesaria de convergencia	192
2.2. Series sumables	193
2.2.1. Serie telescópica	193
2.2.2. Serie geométrica	194
2.2.3. Serie aritmético-geométrica	195
2.3. Criterios de convergencia	196
2.3.1. Criterio de comparación con la integral	196
2.3.2. Serie armónica generalizada	197
2.3.3. Criterio de comparación de Gauss	197
2.3.4. Criterio de comparación en el límite	197
2.3.5. Criterio de la raíz	198
2.3.6. Criterio del cociente	198
2.3.7. Criterio de Raabe	199
2.4. Series alternadas	199
2.4.1. Definición	199
2.4.2. Criterio de convergencia de series alternadas	200
2.4.3. Suma aproximada de series alternadas	200
3. Sucesiones de funciones	201
3.1. Definición	201
3.2. Convergencia puntual	201

3.3. Convergencia uniforme	202
3.3.1. Continuidad, acotación e integración de la función límite	202
4. Series de funciones	204
4.1. Definición	204
4.2. Convergencia puntual y uniforme	204
4.2.1. Definición	204
4.2.2. Continuidad, acotación e integración de la función límite	205
4.2.3. Criterio mayorante de Weierstrass para la convergencia uniforme	205
5. Series de potencias	206
5.1. Definición y convergencia	206
5.1.1. Definición	206
5.1.2. Radio de convergencia	206
5.1.3. Convergencia de la serie de potencias	207
5.1.4. Campo de convergencia	207
5.1.5. Derivación e integración de series de potencias	208
5.2. Desarrollos en serie de potencias	211
5.2.1. Serie de Taylor	211
5.2.2. Series de potencias de algunas funciones elementales	212
6. Series de Fourier	212
6.1. Definición de la serie de Fourier clásica	212
6.2. Las series trigonométricas en modo complejo	213
6.3. Ejemplo	213
Conceptos básicos a retener	215
Actividades de autocomprobación	215
Referencias bibliográficas	222
Unidad didáctica 6. Funciones de varias variables reales	223
Objetivos de la Unidad	225
1. Conceptos básicos	226
1.1. Nociones básicas de la topología de $\mathbb{R}^n$	226
1.2. Funciones reales de varias variables reales	227

2. Límites y continuidad	228
2.1. Límites de funciones de dos variables	228
2.1.1. Límite de una función de dos variables en un punto	228
2.1.2. Propiedades	228
2.1.3. Límites iterados y direccionales	230
2.1.4. Cálculo de límites en coordenadas polares	232
2.2. Límites de funciones de más de dos variables	233
2.3. Continuidad	234
2.3.1. Continuidad de una función en un punto	234
2.3.2. Tipos de discontinuidad	234
2.3.3. Propiedades	234
2.3.4. Teorema de los extremos de Weierstrass	235
3. Derivación	235
3.1. Derivadas parciales	235
3.1.1. Derivadas parciales de una función de dos variables	235
3.1.2. Interpretación geométrica y física	236
3.1.3. Derivadas parciales y continuidad	237
3.1.4. Derivadas parciales de funciones de más de dos variables ...	237
3.1.5. Derivadas parciales de orden superior	237
3.1.6. Igualdad de las derivadas parciales cruzadas	238
3.2. Diferenciación	238
3.2.1. Incrementos y diferenciales	238
3.2.2. Diferencial de una función en un punto	239
3.2.3. Condición necesaria y condición suficiente de diferenciabi-	
lidad	239
3.2.4. La diferencial como aproximación	239
3.2.5. Observación	240
3.3. La regla de la cadena. Derivación implícita	241
3.3.1. Regla de la cadena	241
3.3.2. Derivación implícita	242
3.4. Derivada direccional y gradiente	244
3.4.1. Derivada direccional de una función de dos variables	244
3.4.2. Gradiente de una función de dos variables	244
3.4.3. Propiedades	245
3.4.4. Derivada direccional y gradiente de una función de tres va-	
riables	245

3.5. Aplicaciones geométricas	246
3.5.1. Recta normal y plano tangente a una superficie	246
3.5.2. Recta tangente a una curva dada como intersección de dos superficies	247
4. Extremos	248
4.1. Extremos relativos y absolutos	248
4.1.1. Extremos relativos	248
4.1.2. Puntos críticos	249
4.1.3. Condición necesaria para extremos relativos	249
4.1.4. Criterio para la determinación de extremos	249
4.1.5. Extremos absolutos	250
4.2. Problemas de optimización	252
4.3. Multiplicadores de Lagrange	253
4.3.1. Extremos condicionados	253
4.3.2. El método de los multiplicadores de Lagrange	253
Conceptos básicos a retener	258
Actividades de auto comprobación	258
Referencias bibliográficas	264
Unidad didáctica 7. Integración de funciones de varias variables reales	265
Objetivos de la Unidad	267
1. Integrales dobles	268
1.1. Integral doble de Riemann sobre rectángulos	268
1.1.1. Definición	268
1.1.2. Funciones integrables	269
1.1.3. Teorema de Fubini	269
1.2. Integrales dobles sobre otros recintos acotados	270
1.2.1. Definición	270
1.2.2. Integral doble sobre recintos proyectables	270
1.3. Cambio de variable a coordenadas polares	271
1.4. Aplicaciones	273
1.4.1. Volúmenes	273
1.4.2. Áreas planas	274

1.4.3. Masas y centros de gravedad	275
1.4.4. Áreas de superficies proyectables	277
2. Integrales triples	277
2.1. Integral triple de Riemann sobre rectángulos	277
2.1.1. Definición	277
2.1.2. Funciones integrables	278
2.1.3. Teorema de Fubini	278
2.2. Integrales triples sobre otros recintos acotados	279
2.2.1. Recintos proyectables	279
2.2.2. Recintos seccionables	280
2.3. Cambio de variable a coordenadas esféricas	281
3. Integrales múltiples impropias	282
4. Integrales de línea	284
4.1. Integral de línea de funciones reales	284
4.1.1. Definición de camino	284
4.1.2. Definición de integral de línea de funciones reales	284
4.1.3. Observaciones	284
4.2. Aplicaciones	285
5. Integrales de línea	286
5.1. Integrales de línea de campos vectoriales	286
5.1.1. Definición	286
5.1.2. Notación	286
5.1.3. Propiedades	287
5.1.4. Interpretación física	287
5.2. Independencia del camino	288
5.2.1. Definición	288
5.2.2. Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de línea	289
5.2.3. Consecuencias	289
5.2.4. Función potencial	290
5.2.5. Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea	290
5.2.6. Teorema de caracterización	291

5.2.7. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de función potencial	292
5.2.8. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de función potencial en el plano	292
5.3. El teorema de Green-Riemann	294
Conceptos básicos a retener	297
Actividades de autocomprobación	297
Referencias bibliográficas	301
Unidad didáctica 8. Análisis vectorial	303
Objetivos de la Unidad	305
1. Introducción	306
2. Gradiente	306
2.1. Definición	307
3. Derivada direccional	307
3.1. Definición	308
4. Divergencia y rotacional	309
4.1. Definición de rotacional	309
4.2. Definición de divergencia	310
4.3. Teorema 1	311
4.4. Teorema 2	311
4.5. Diferencia entre divergencia y gradiente	311
5. Tabla de identidades comunes en el análisis vectorial	312
6. Integral de trayectoria	312
6.1. Definición	312
7. Integral de línea	313
7.1. Definición	313
8. Teoremas del análisis vectorial	314
8.1. Teorema de Green	314
8.2. Teorema de Stokes	315
8.3. Teorema de Gauss	316

Conceptos básicos a retener	318
Actividades de autocomprobación	318
Referencias bibliográficas	323
Unidad didáctica 9. Ecuaciones diferenciales ordinarias I	325
Objetivos de la Unidad	327
1. Introducción	328
1.1. Significado de las derivadas en las ecuaciones diferenciales	329
1.2. Tipos de ecuaciones diferenciales	331
1.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias	331
1.4. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	334
1.5. Orden de una ecuación diferencial	335
2. Modelización de problemas	336
2.1. Modelización de un problema: la caída del paracaidista	336
2.2. Caso práctico: la apocalipsis zombi	339
2.3. Otros casos similares	341
3. Comprobación de resultados	346
4. Métodos elementales de resolución	349
4.1. Ecuaciones diferenciales separables	350
4.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas	353
4.3. Otro tipo de ecuación resoluble por cambio de variable	355
4.4. El paracaidista	357
5. Ecuaciones exactas	359
5.1. Factores integrantes	361
6. Ecuaciones lineales de primer orden	363
6.1. Solución de una ecuación lineal	363
7. Ecuaciones reducibles a lineales	368
7.1. Ecuación de Bernoulli	368
7.2. Ecuaciones de Riccati	371
8. Dibujo aproximado de soluciones	374

9. Existencia y unicidad, prolongabilidad y estabilidad	377
9.1. Existencia, unicidad y prolongabilidad	377
9.2. Estabilidad	381
10. Ecuaciones autónomas	386
10.1. Definición y propiedades	386
10.2. Ejemplos	390
Conceptos básicos a retener	395
Actividades de autocomprobación	395
Referencias bibliográficas	401
Unidad didáctica 10. Ecuaciones diferenciales ordinarias II	403
Objetivos de la Unidad	405
1. Introducción	406
2. Ecuaciones lineales de segundo orden	407
2.1. Superposición lineal	407
2.2. Problema de valores iniciales	408
2.3. Obtención de una solución particular si se conoce ya otra	412
3. Ecuaciones lineales de segundo orden de coeficientes constantes	413
3.1. Caso a) cuando se obtienen dos raíces reales	414
3.2. Caso b) cuando se obtiene una raíz doble	416
3.3. Caso c) cuando se obtienen dos raíces complejas conjugadas	418
3.4. Oscilador armónico	421
3.5. Problemas de contorno	424
3.6. Ecuación lineal no homogénea	426
3.6.1. Método de variación de las constantes	431
3.7. Oscilador armónico amortiguado forzado	432
3.7.1. Oscilador sin amortiguamiento	434
3.7.2. Oscilador amortiguado	436
3.8. Circuitos eléctricos	437
3.8.1. Circuito RL	440
3.8.2. Circuito RC	442
3.8.3. Circuito RCL	443
4. Ecuaciones lineales de coeficientes constantes de orden arbitrario	444

5. Ecuaciones lineales de coeficientes no constantes	447
5.1. Ecuación de Euler-Cauchy	447
5.2. Existencia y unicidad	448
6. Transformada de Laplace	449
6.1. Definición y propiedades	449
6.2. Resolución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace	456
6.2.1. El problema de cómo calcular la antitransformada	458
6.3. Caso lineal no homogéneo de segundo orden.....	461
6.4. Algunos casos prácticos	462
Conceptos básicos a retener	467
Actividades de autocomprobación	467
Referencias bibliográficas	471
Unidad didáctica 11. Sistemas de ecuaciones diferenciales	473
Objetivos de la Unidad	474
1. Introducción	475
2. Preámbulo de álgebra	475
2.1. Autovalores y autovectores	476
2.2. Diagonalización	479
3. Sistemas de ecuaciones de primer orden	481
3.1. Resolución de sistemas mediante variación de constantes	483
3.2. Resolución de sistemas mediante Laplace	489
4. Sistemas de ecuaciones autónomas	491
4.1. Mapas de fases	492
4.2. Clasificación de puntos críticos	496
4.3. Sistemas no lineales	502
4.4. Metodología	504
4.5. Ecuaciones autónomas de segundo orden	510
4.6. Ecuaciones y sistemas exactos	515
Conceptos básicos a retener	519
Actividades de autocomprobación	519
Referencias bibliográficas	525

